

$x_2=a+b$, 又因为 $f(x_1+x_2)=\sqrt{3}$, 所以 $\sin[2(a+b)+\phi]=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\sin(a+b+\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a+b=\frac{\pi}{6}$, $\phi=\frac{\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{\pi}{3}$.

点评: 本题充分利用图形的对称性, 由数到形, 再由形到数, 相互转化, 进而解决问题.

五、利用数形结合的思想解决线性规划问题

线性规划也是高考中常考的知识点, 一般以客观题形式出现, 基本题型是给出约束条件求目标函数的最值, 常见的结合方式有: 纵截距、斜率、两点间的距离、点到直线的距离, 解决此类问题常利用数形结合.

利用图解法解决线性规划问题的一般步骤:

(1) 作出可行域; (2) 分析目标函数 $z=f(x,y)$ 的 z 的几何意义; (3) 确定最优解.

例 10. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg, 乙材料 1kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg, 乙材料 0.3kg, 用 3 个工时. 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150kg, 乙材料 90kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为 _____ 元.

解析: 设生产产品 A、产品 B 分别为 x 、 y 件, 利润之和

$$\begin{cases} 1.5x+0.5y \leq 150, \\ x+0.3y \leq 90, \\ 5x+3y \leq 600, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad \text{① 目标函数 } z=2100x+900y.$$

$$\begin{cases} 3x+y \leq 300, \\ 10x+3y \leq 900, \\ 5x+3y \leq 600, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad \text{②}$$

作出二元一次不等式组②表示的平面区域 (如图 10), 即可行域.

将 $z=2100x+900y$ 变形, 得 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$, 平行直线 $y=-\frac{7}{3}x$, 当直线 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$

经过点 M 时, z 取得最大值.

$$\begin{cases} 10x+3y=900, \\ 5x+3y=600, \end{cases}$$

得 M 的坐标 (60, 100).

所以当 $x=60$, $y=100$ 时, $z_{\max}=2100 \times 60 + 900 \times 100 = 216000$.

故生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为

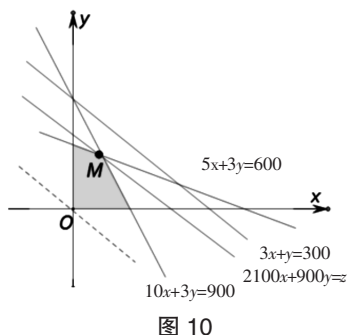


图 10

216000 元.

点评: 本题线性规划中最常见的截距型问题, 但运算量较大, 失分的一个主要原因是运算失误.

例 11. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-y \leq 0, \\ x+y-4 \leq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为

解析: 作出可行域, 如图 11 中阴影部分所示, 令 $z=\frac{y}{x}$, 则由斜率的意义知, $z=\frac{y-0}{x-0}$ 表示可行域内一点 (x,y) 与原点连线的斜率, 由图可知, 点 A(1,3) 与原点连线的斜率最大, 故 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 3.

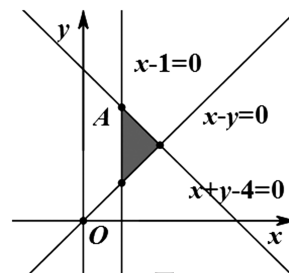


图 11

点评: 本题线性规划中最常见的斜率型问题.

例 12. (广东六校 2017 年高三第三次联考试题 (文))

设实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-1 \leq 0, \\ x+y-1 \leq 0, \\ x \geq -1, \end{cases}$ 则 $x^2+(y+2)^2$ 的取值范围是 ()

A. $[\frac{1}{2}, 17]$ B. $[1, 17]$ C. $[1, \sqrt{17}]$ D. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{17}]$

解析: 作出可行域, 如图 12 中阴影部分所示, 令 $z=x^2+(y+2)^2$, 则 z 表示可行域中的点 (x,y) 到点 $(0,-2)$ 的距离的平方, 于是 $|AB|^2 \leq z \leq |AC|^2$, 即 $\frac{1}{2} \leq z \leq 17$. 故选 A.

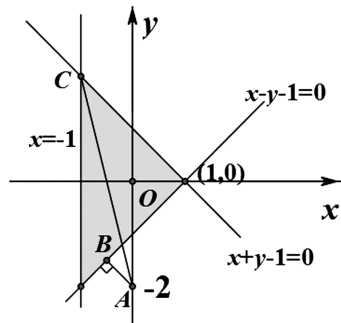


图 12

点评: 本题线性规划中最常见的距离型问题, 往往由于没有理解 $z=x^2+(y+2)^2$ 的几何意义, 易错选 D.

六、利用数形结合的思想解决解析几何问题

解析几何的基本思想就是数形结合, 在解题中善于将数形结合的数学思想运用于对点、线、曲线的性质及其相互关系的研究中.

例 13. (2016 年广州市模拟题) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点 F 作一条渐近线的垂线, 垂足为点 A, 与另一条渐近线交于点 B, 若 $\overrightarrow{FB} = 2\overrightarrow{FA}$, 则此双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$